Задачи по предмету «Высшая математика».

1. Производная функции. Дифференциал функции.

В задачах 1-7 найти производную функции

1.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}+3x^2-6;$$

$$f'(x)=(\frac{x^4}{4})'+(3x^2)'-6'=\frac{4x^3}{4}+3\cdot 2x-0=x^3+6x=x(x^2+6);$$

2.

$$S=\upsilon_0 t+\frac{at^2}{2};$$

$$S'_t=\left(\vartheta_0 t\right)'t+\left(\frac{at^2}{2}\right)'t=\vartheta_0+\frac{a}{2}\cdot 2t=\vartheta_0+at;\vartheta=\vartheta_0+at$$

3.

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}};\ \ f'(x)=\frac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2})}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

4.

$$f(x)=\frac{7lnx}{e^x};$$

$$f'(x)=7\frac{(lnx)'e^x-lnx(e^x)'}{(e^x)^2}=7\frac{\frac{e^x}{x}-lnx\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{7(1-xlnx)\cdot}{e^x}$$

5.

$$f(x)=x^2ctgx;$$

$$f'(x)=(x^2)'_x\cdot ctgx+(ctgx)'\cdot x^2=2x\cdot ctgx+\left(\frac{1}{sin^2x}\right)x=x(2ctgx-\frac{x}{sin^2x})$$

6.

$$f(x) = cos^3 2x;$$

$$f'(x) = 3cos^2 2x \cdot (cos2x)' = -3cos^2 2x \cdot sin2x \cdot (2x)' = -6cos^2 2x \cdot sin2x$$

В задачах 7-9 найти дифференциал функции

7.

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{1-x^3}; \quad df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-3x}}{1-x^3}\right)' = \frac{(e^{-3x})'(1-x^3)-(e^{-3x})(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{-3e^{-3x}(1-x^3)-3e^{-3x}x^2}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{3e^{-3x}(x^3+x^2-1)}{(1-x^3)^2}; \qquad df = \frac{3e^{-3x}(x^3+x^2-1)}{(1-x^3)^2}dx;$$

8.

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{1-x^3}; \quad df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^{-3x}}{1-x^3}\right)' = \frac{(e^{-3x})'(1-x^3)-(e^{-3x})(1-x^3)'}{(1-x^3)^2} = \frac{-3e^{-3x}(1-x^3)-3e^{-3x}x^2}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{3e^{-3x}(x^3+x^2-1)}{(1-x^3)^2}; \qquad df = \frac{3e^{-3x}(x^3+x^2-1)}{(1-x^3)^2}dx;$$

9.

$$f(x) = x^2 ln\left(1-x^2\right); \quad df = f'(x)dx;$$

$$f'(x) = \left[x^2 ln\left(1-x^2\right)\right]' = 2x \cdot ln\left(1-x^2\right) - \frac{2x^3}{1-x^2} = 2x\left(ln\left(1-x^2\right) - \frac{x^2}{1-x^2}\right);$$

$$df = 2x\left(ln\left(1-x^2\right) - \frac{x^2}{1-x^2}\right)dx$$

2. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл.

В задачах 10-11 вычислить интеграл способом непосредственного интегрирования.

10. $\int (x+1)^3 dx = \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + C$

11. $\int (x^4 + 7^x)dx = \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{ln7} + C$

В задачах 12-15 вычислить интеграл подстановкой.

12. $$\int \frac{t^2}{(1+2t^3)^2}dt = \left| \begin{array}{l} 1+2t^3 = u \\ 6t^2\,dt = du \\ t^2\,dt = \frac{du}{6} \end{array} \right| = \int \frac{1}{6u^2}du = -\frac{1}{6u} + C = -\frac{1}{6\left(1+2t^3\right)} + C$$

13.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}} = \left| \begin{array}{l} 4x-3 = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\sqrt{t} + C = \frac{1}{2}\sqrt{4x-3} + C$$

14.
$$\int sin3xdx = \left| \begin{array}{l} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = dt/3 \end{array} \right| = \int sint \cdot \frac{dt}{3} = -\frac{1}{3}cost + C = -\frac{1}{3}cos3x + C$$

15. $$\int e^{2cosx}sinxdx = \left| \begin{array}{l} 2cosx = t \\ -2sinxdx = dt \\ sinxdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int -\frac{e^t}{2}dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{e^{2cosx}}{2} + C$$

В задачах 16-18 вычислить интеграл способом интегрирования по частям.

16. $$\int xsin2xdx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = sin2xdx \\ v = -\frac{cos2x}{2} \end{array} \right| = -\frac{cos2x}{2} \cdot x + \int \frac{cos2x}{2}dx = -\frac{xcos2x}{2} + \frac{sin2x}{4} + C$$

17. $$\int xcosxdx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = cosxdx \\ v = sinx \end{array} \right| = xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C$$

18.

$$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, \ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C$$

19. Скорость роста популяции насекомых $\upsilon = t + t^2$ (t выражается в днях). При $t=0$ число особей в популяции равно $10\,000$. Определить численность популяции спустя: 1) 1 день; 2) 5 дней; 3) 10 дней.
Решение:

$$x(t) = \int (t + t^2)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C; \quad C = 10\,000.$$

$$1)\ \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} + 10000 = 10000$$

,

$$2)\ \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{3} + 10000 = 10054$$

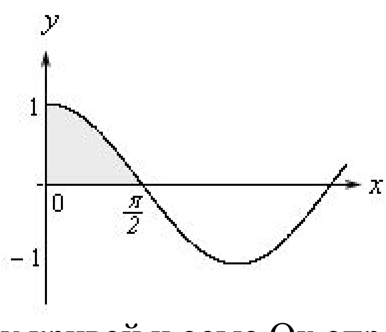
$$3)\ \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{3} + 10000 = 10383$$

20. Скорость роста числа бактерий задается формулой $\upsilon = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t$. Составить уравнение роста числа бактерий $x(t)$, если при $t=0$ $x(0)=10^6$.
Решение:

$$x(t) = \int (10^4 - 2 \cdot 10^3 t)dt = 10^4 t - \frac{2 \cdot 10^3 t^2}{2} + C = 10^4 t - 10^3 t^2 + C; \quad C = 10^6.$$

$$x(t) = 10^4 t - 10^3 t^2 + 10^6$$

21. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y=\cos x$ и осью Ox, в пределах 0 до $\pi/2$.
Решение:



Площадь заключенная между кривой и осью Ox определяется интегралом:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx = sinx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\frac{\pi}{2} - sin0 = 1 \text{ ед.кв.}$$

В задачах 22-24 найти определенный интеграл.

22.

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+5} = \left| \begin{array}{l} e^x+5=t \\ d(e^x+5)=dt \\ e^x dx = dt \\ x=0.....t=6 \\ x=1.....t=e+5 \end{array} \right| = \int_6^{e+5} \frac{dt}{t} = lnt \Big|_6^{e+5} = ln\frac{e+5}{6}$$

23.

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} e^{-x}dx=dv \\ x+1=u \\ d(x+1)=du \\ dx=du \\ \int e^{-x}dx = -e^x + C \end{array} \right| = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -2e^{-1}+1-e^{-1}+1 = 2-3e^{-1}$$

24.

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x}dx = \left| \begin{array}{l} e^{-x}dx=dv \\ x^2=u \\ 2xdx=du \\ \int e^{-x}dx = -e^x + C \end{array} \right| = -e^{-x}2x\Big|_{-1}^1 + 2\int_{-1}^1 e^{-x}xdx = \left| \begin{array}{l} e^{-x}dx=dv \\ x=u \\ dx=du \\ \int e^{-x}dx = -e^x + C \end{array} \right| =$$

$$= -e^{-x}2x\Big|_{-1}^1 - 2e^{-x}x\Big|_{-1}^1 + 2\int_{-1}^1 e^{-x}dx = -e^{-x}2x\Big|_{-1}^1 - 2e^{-x}x\Big|_{-1}^1 - 2e^{-x}\Big|_{-1}^1 = -6e^{-1} + 3e$$

3. Элементы теории вероятностей.

25. В семье трое детей. Считая рождение мальчика и девочки равновероятными событиями, найти вероятность того, что в семье три мальчика.

Решение:

Так как рождение мальчика и девочки равновероятные события, то

$$P(M) = P(Д) = \frac{1}{2}$$

Вероятность того, что в семье три мальчика

$$P(MMM) = P(M) \cdot P(M) \cdot P(M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,125.$$

25. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

Решение:

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку

$$q_1 = 0,99; \quad q_2 = 0,985; \quad q_3 = 0,98.$$

Полная система событий состоит в следующем: могут допустить ошибку 3, 2, 1, 0 врачей. Сумма вероятностей этих событий равна единице

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_0 = 1$$

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку равна

$$p_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,99 \cdot 0,985 \cdot 0,98 = 0,956$$

Вероятность того, что хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе

$$p = 1 - p_0 = 1 - 0,956 = 0,044.$$

26. В группе из 30 студентов на контрольной работе оценку «отлично» получили 8 человек, «хорошо» – 12, «удовлетворительно» – 8. Какова вероятность того, что три студента, вызванных к доске, имеют по контрольной работе оценку «хорошо»?

Решение:

Вероятность того, что вызванный студент получил оценку «хорошо»

$$P = \frac{m}{n} = \frac{12}{30} = 0,4$$

Вероятность того, что три студента, вызванных к доске, имеют по контрольной работе оценку «хорошо»

$$P = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064.$$

27. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0,01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0,015 и 0,02. Найти вероятность того, что при осмотре больного хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

Решение:

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку

$$q_1 = 0,99; \quad q_2 = 0,985; \quad q_3 = 0,98.$$

Полная система событий состоит в следующем: могут допустить ошибку 3, 2, 1, 0 врачей. Сумма вероятностей этих событий равна единице

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_0 = 1$$

Вероятность того, что врачи не допустят ошибку равна

$$p_0 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}99 \cdot 0{,}985 \cdot 0{,}98 = 0{,}956$$

Вероятность того, что хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе

$$p = 1 - p_0 = 1 - 0{,}956 = 0{,}044.$$

28. Всхожесть партии семян некоторого растения составляет 90 %. Определить вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут 4.
Решение:
Вероятность того, что семена не взойдут равна

$$q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

По формуле Бернулли

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!(5-4)!} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 0{,}33.$$

29. Завод отправил на аптечный склад 5000 термометров. Вероятность повреждений каждого термометра в пути равна 0,0002. Какова вероятность того, что на аптечный склад прибудет ровно 3 поврежденных термометра?
Решение:
По условию $n=5000$, $p=0{,}0002$, $m=3$. Параметр $\mu = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$
По формуле Пуассона

$$P_n(m) \cong \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}; \qquad P_{5000}(3) \cong \frac{1^3}{3!} \cdot e^{-1} = 0{,}06$$

30. Если в среднем левши составляют 1 %, какова вероятность того, что среди 200 человек: 1) ровно 4 левши; 2) по крайней мере 4 левши?
Решение:
1) По условию $n=200$, $p=0{,}01$, $m=4$. Параметр $\mu = np = 200 \cdot 0{,}01 = 2$
По формуле Пуассона

$$P_n(m) \cong \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}; \qquad P_{200}(4) \cong \frac{2^4}{4!} \cdot e^{-2} = 0{,}09$$

2) Вероятность того, что среди 200 человек по крайней мере 4 левши

$$P(m \ge 4) = 1 - P(m < 4)$$

$$P(m < 4) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) + P_{200}(3);$$

$$P_{200}(0) \cong e^{-2} = 0{,}135; \quad P_{200}(1) \cong \frac{2^1}{1!} \cdot e^{-2} = 0{,}27;$$

$$P_{200}(2) \cong \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = 0{,}27; \quad P_{200}(3) \cong \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0{,}18;$$

Искомая вероятность

$$P(m \geq 4) = 1 - (0{,}135 + 0{,}27 + 0{,}27 + 0{,}18) = 0{,}15.$$

4. Элементы математической статистики.

31. Предполагая одинаковыми вероятности рождения мальчика и девочки, установить закон распределения случайной величины X, которая выражает число мальчиков в семье, имеющей пять детей.

Решение:

Пусть X – количество мальчиков в семье. Величина X может принимать значения 0,1,2,3,4,5. Найдем вероятности этих значений по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m};$$

$$P_5(0) = 0{,}5^5 = 0{,}03125; \qquad P_5(1) = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^1 = 0{,}15625;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}3125; \qquad P_5(3) = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{1!4!} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}15625; \qquad P_5(5) = 0{,}5^5 = 0{,}03125;$$

Закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль: $0{,}03125 + 0{,}15625 + 0{,}3125 + 0{,}3125 + 0{,}15625 + 0{,}03125 = 1$

32. Закон распределения случайной величины X задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4
P	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение:

Сначала находим математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0 \cdot 0,13 + 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,02 = 1,58\ .$$

Далее запишем закон распределения X^2:

X^2	0	1	4	9	16
P	$0,13$	$0,35$	$0,35$	$0,15$	$0,02$

Математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,13 + 1 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,35 + 9 \cdot 0,15 + 16 \cdot 0,02 = 3,42$$

Находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 3,42 - 1,58^2 = 0,92\ .$$

Отсюда находим среднеквадратическое отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,92} \approx 0,96\ .$$

33. Известно, что для человека pH крови является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием μ=7,4 и средним квадратическим отклонением σ =0,2. Найти вероятность того, что уровень pH находится между 7,35 и 7,45.

Решение:

Вероятность того, что X примет значение из интервала $\alpha < X < \beta$, имеет вид:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2/2} dx$ – функция Лапласа.

$$P(7,35 < X < 7,45) = \Phi\left(\frac{7,45 - 7,4}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{7,35 - 7,4}{0,2}\right) = \Phi(0,25) - \Phi(-0,25) =$$
$$= \Phi(0,25) + \Phi(0,25) = 2\Phi(0,25)\ .$$

По таблице находим: $\Phi(0,25) = 0,0987$, следовательно:

$$P(7,35 < X < 7,45) = 2 \cdot 0,0987 = 0,1974\ .$$

34. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением $f(x) = ae^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Найти коэффициент a и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

Решение:

Запишем вначале закон распределения. Общая формула имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Сравним закон распределения с его общим видом:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-5)^2}{8}} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Следовательно $\sigma = 2; \quad \mu = 5; \quad a = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}$.

Вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5 равна

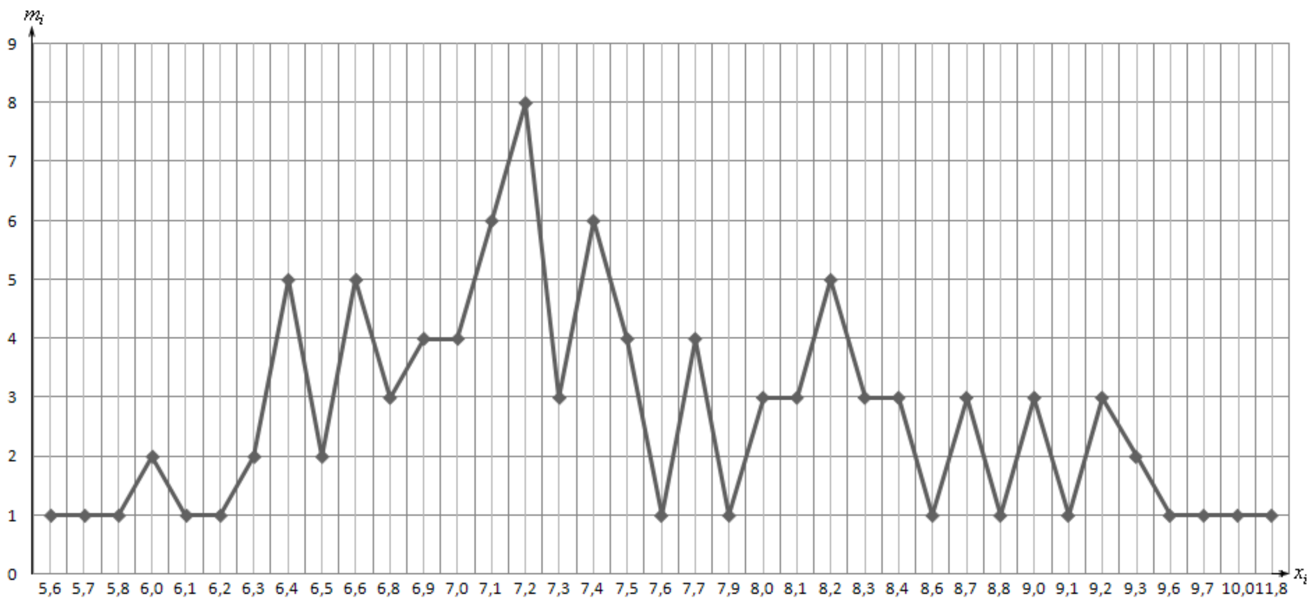
$$P(|X-\mu| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right);$$

$$P(|X-5| < 1{,}5) = 2\Phi\left(\frac{1{,}5}{2}\right) = 2\Phi(0{,}75) = 2 \cdot 0{,}2734 = 0{,}5468.$$

35. Представить в виде статистического дискретного ряда данные о длине листьев садовой земляники (в см) и построить полигон частот: 8,2; 9,7; 6,6; 7,4;6,4; 6,6; 6,8; 8,4; 7,1; 8,0; 9,0; 6,0; 7,6; 8,1; 11,8; 5,8; 9,3; 7,3; 8,2; 7,2; 7,2; 6,4; 7,7; 9,0; 8,1; 7,1; 7,1; 8,8; 7,5; 9,2; 7,5; 6,8; 7,0; 6,4; 7,4; 8,2; 6,3; 7,0; 8,1; 10,0; 7,0; 7,1; 8,7; 6,3; 8,6; 7,7; 7,3; 8,0; 8,4; 9,3; 7,3; 6,0; 7,7; 6,1; 9,6; 7,4; 7,2; 7,2; 8,7; 7,5; 9,1; 6,4; 8,3; 6,5; 8,2; 7,2; 6,9; 6,9; 8,2; 9,0; 7,4; 8,0; 8,4; 7,0; 7,1; 7,4; 6,6; 6,4; 8,3; 7,9; 8,3; 7,2; 7,2; 6,6; 6,6; 7,7; 8,7; 5,6; 7,5; 5,7; 6,9; 7,4; 7,2; 6,2; 6,9; 6,8; 9,2; 9,2; 7,1; 6,5.

Решение:

X_i	5,6	5,7	5,8	6,0	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,8	6,9	7,0
m_i	1	1	1	2	1	1	2	5	2	5	3	4	4
X_i	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,9	8,0	8,1	8,2	8,3	8,4
m_i	6	8	3	6	4	1	4	1	3	3	5	3	3
X_i	8,6	8,7	8,8	9,0	9,1	9,2	9,3	9,6	9,7	10,0	11,8		
m_i	1	3	1	3	1	3	2	1	1	1	1		



36. Построить полигон частот и относительных частот по распределению выборки

X_i	2	3	5	6
m_i	10	15	5	20

Решение:

Полигон частот (рис. 1).

Полигон относительных частот (рис. 2).

$$P^* = \frac{m_i}{n_i}; \quad n_1 = 10 + 15 + 5 + 25 = 50;$$

$$P_1^* = \frac{10}{50} = 0{,}2; \qquad P_2^* = \frac{15}{50} = 0{,}3; \qquad P_3^* = \frac{5}{50} = 0{,}1; \qquad P_4^* = \frac{20}{50} = 0{,}4.$$

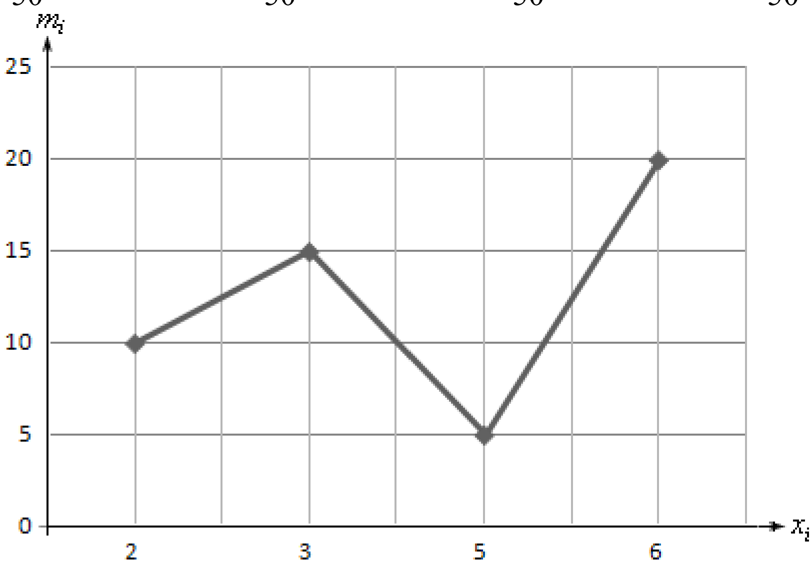


рис. 1

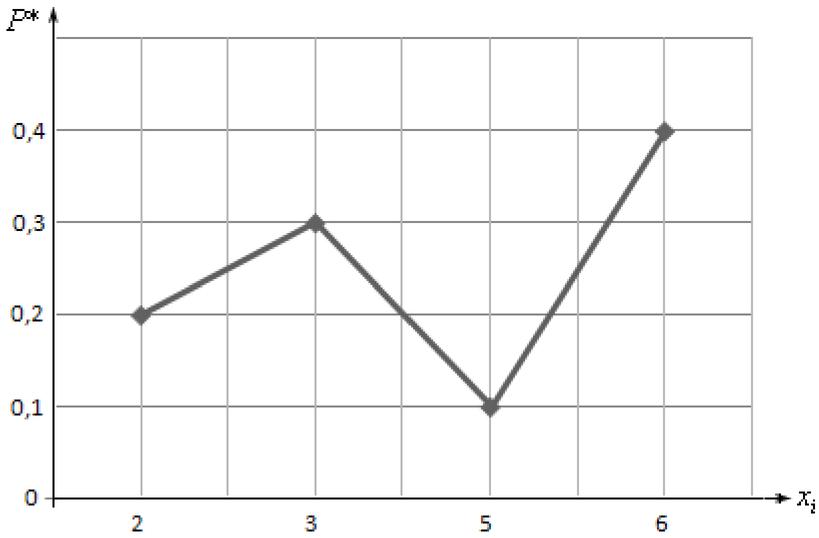
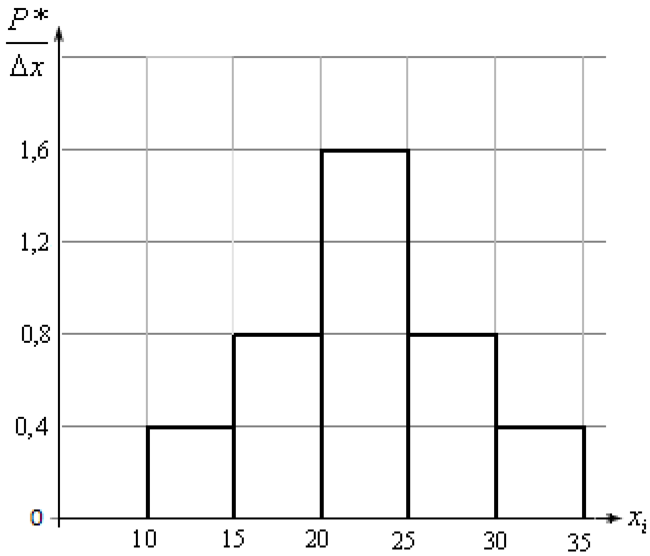


рис. 2

37. Построить гистограмму относительных частот по распределению выборки

X_i	*10-15*	*15-20*	*20-25*	*25-30*	*30-35*
m_i	*2*	*4*	*8*	*4*	*2*

Решение:



38. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней.

Решение:

$$\bar{x}_в = \frac{8+10+7+9+11+6+9+8+10+7}{10} = 8{,}5$$

$$S_{\bar{x}_в} = \sqrt{\frac{2\cdot(8-8{,}5)^2 + 2\cdot(10-8{,}5)^2 + 2\cdot(7-8{,}5)^2 + 2\cdot(9-8{,}5)^2 + (11-8{,}5)^2 + (6-8{,}5)^2}{10\cdot(10-1)}} = 0{,}5$$

39. В результате десяти измерений диаметра капилляра в стенке легочных альвеол были получены следующие данные: 2,83; 2,82; 2,81; 2,85; 2,78; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 2,84 мкм. Вычислить оценку истинной величины диаметра капилляра , абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности γ=0,95.

Решение:

Находим среднее арифметическое значение:

$$\bar{x} = \frac{2,83 + 2,82 + 2,81 + 2,85 + 2,78 + 2,86 + 2,83 + 2,85 + 2,83 + 2,84}{10} = 2,83\ (мкм)$$

Находим среднюю квадратическую ошибку отдельного измерения:

$$S = \sqrt{\frac{(2,83 - 2,83)^2 + (2,82 - 2,83)^2 + ... + (2,84 - 2,83)^2}{9}} = 0,023\ (мкм)$$

Определяем наибольшую возможную ошибку отдельного измерения:

$$S_{наиб} = 3S\ ;\ S_{наиб} = 3 \cdot 0,023 = 0,069\ (мкм)$$

В приведенном примере отсутствуют измерения, отличающиеся от x больше, чем на *0,069 мкм*, поэтому все они будут участвовать в последующих расчетах.

Определяем среднюю квадратичную ошибку среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0,023}{\sqrt{10}} = 0,007$$

Определяем точность измерения (абсолютную погрешность среднего арифметического).

$$\Delta x = t_{\alpha,n} \cdot S_x; \quad \alpha = 0,95; \quad n = 10$$

Коэффициент Стьюдента находим по таблице

$$\Delta x = 2,23 \cdot 0,007 = 0,015\ ;\ \ t_{\alpha,n} = t_{0.95,10} = 2,228 \approx 2,23$$

Таким образом, диаметр капилляра с учетом только случайной ошибки может быть записан следующим образом: $\bar{x} = (2,83 \pm 0,01)\ мкм$

Доверительный интервал $\bar{x}$ заключается в пределах $2,83 - 0,01 \le \bar{x} \le 2,82 + 0,01$

Это значит, что с вероятностью *0,95* истинное значение измеряемой величины не выйдет за пределы интервала: *2,82* и *2,84*

Определяем относительную ошибку которая не должна превышать 5%:

$$\varepsilon = \frac{0,01}{2,83} \cdot 100\% = 0,3\%$$

40. С помощью вискозиметра проведено измерение коэффициента вязкости спирта. Расчетная формула имеет вид:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0},$$

где η, ρ, и t – вязкость, плотность и время истечения спирта из капилляра вискозиметра; η_0, ρ_0, и t_0 – вязкость, плотность и время истечения воды (η_0*=0,01 П;* ρ_0*= 998,2 кг/м*^{3}; ρ*=790,1 кг/м*^{3} – принять за точные числа). В пяти опытах получены следующие результаты:

t, сек	80	79	81	83	78
t_0, сек	48	50	47	51	46

Оценить истинное значение коэффициента вязкости с доверительной вероятностью α=0,95. Оценить абсолютную и относительную погрешность измерения.

Решение:

Определим выборочные характеристики:

а) средние значения непосредственно измеренных величин t и t_0:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{80+79+81+83+78}{5} = 80{,}2\ (сек);$$

$$\overline{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_{0i}}{n} = \frac{48+50+47+51+46}{5} = 48{,}4\ (сек),$$

б) оценки среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренных величин:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2},$$

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}\left[(80-80{,}2)^2 + (79-80{,}2)^2 + (81-80{,}2)^2 + (83-80{,}2)^2 + (78-80{,}2)^2\right]} = 0{,}86 \cdot$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_{0i} - \overline{t_0})^2},$$

$$S_{\overline{t_0}} = \sqrt{\frac{1}{5\cdot 4}\left[(48-48{,}4)^2 + (50-48{,}4)^2 + (47-48{,}4)^2 + (51-48{,}4)^2 + (46-48{,}4)^2\right]} = 0{,}93,$$

Среднее значение коэффициента вязкости:

$$\bar{\eta} = \eta_0 \frac{\rho \bar{t}}{\rho_0 \overline{t_0}}, \qquad \bar{\eta} = 0{,}01 \cdot \frac{709{,}1 \cdot 80{,}2}{998{,}2 \cdot 48{,}4} = 0{,}01\ (П).$$

Оценка среднего квадратического отклонения среднего значения коэффициента вязкости:

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t} S_{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_0} S_{\overline{t_0}}\right)^2};$$

определим частные производные:

$$\eta = \eta_0 \frac{\rho t}{\rho_0 t_0}, \text{ таким образом:}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta_0 \rho}{\rho_0 t_0} = \frac{0{,}01 \cdot 709{,}1}{998{,}2 \cdot 48{,}4} = 0{,}0001,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_0} = -\frac{\eta_0 \rho t}{\rho_0 t_0^2} = -\frac{0{,}01 \cdot 709{,}1 \cdot 80{,}2}{998{,}2 \cdot 48{,}4^2} = -0{,}0002,$$

$$S_{\bar{\eta}} = \sqrt{(0{,}0001 \cdot 0{,}86)^2 + (-0{,}0002 \cdot 0{,}93)^2} = 0{,}0002.$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(4) = 2,78\ .$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\eta = S_{\bar{\eta}} \cdot t_{\alpha}(f) = 0,0002 \cdot 2,78 = 0,0005\ (\Pi)$$

Истинное значение коэффициента вязкости:

$$\eta = (0,01 \pm 0,0005)\ (\Pi)$$

Доверительный интервал:

$$0,01 - 0,0005 \le \eta \le 0,01 + 0,0005$$
$$0,0095 \le \eta \le 0,0105$$

Относительная погрешность:

$$\delta_{\eta} = \frac{\Delta\eta}{\bar{\eta}} = \frac{0,0005}{0,01} = 0,05 = 5\%\ .$$

41. Класс точности миллиампера K=1%, Iток=100 $мА$. Прибором измерили три значения тока I_1=80 $мА$; I_2=50 $мА$; I_3=25 $мА$. Определить относительные ошибки измерений.

$$\text{E} = K\frac{I н}{I}; \qquad E_1 = 1,25\%;\ E_2 = 2\%;\ E_3 = 4\%$$

42. При подсчете количества листьев у одного из лекарственных растений были получены следующие данные: 8, 10, 7, 9, 11, 6, 9, 8, 10, 7. Вычислить выборочную среднюю и оценку среднего квадратического отклонения выборочной средней.

Решение:

$$\bar{x}_в = \frac{8+10+7+9+11+6+9+8+10+7}{10} = 8,5$$

$$S_{\bar{x}_в} = \sqrt{\frac{2\cdot(8-8,5)^2 + 2\cdot(10-8,5)^2 + 2\cdot(7-8,5)^2 + 2\cdot(9-8,5)^2 + (11-8,5)^2 + (6-8,5)^2}{10\cdot(10-1)}} = 0,5$$

43. При измерении некоторой величины X получены следующие результаты: 10,9; 10,7; 11,0; 10,5; 10,6; 10,4; 11,3; 10,8; 11,2; 10,9; 10,8; 10,3; 10,5; 10,9; 10,9; 10,6; 11,3; 10,8; 10,9; 10,7. Вычислить точечную и интервальную оценки для величины X с доверительной вероятностью γ = 0,95.

Решение:

$$\bar{x}_в = \frac{10,9\cdot 5 + 10,7\cdot 2 + 11 + 10,5\cdot 2 + 10,6\cdot 2 + 10,4 + 11,3\cdot 2 + 10,8\cdot 3 + 11,2 + 10,3}{20} = 10,8$$

$$S_{\bar{x}_в} = \sqrt{\frac{1}{20\cdot 19}\begin{bmatrix} 5(10{,}9-10{,}8)^2+2(10{,}7-10{,}8)^2+2(10{,}5-10{,}8)^2+2(10{,}6-10{,}8)^2+(11-10{,}8)^2+ \\ (10{,}4-10{,}8)^2+2(11{,}3-10{,}8)^2+3(10{,}8-10{,}8)^2+(11{,}2-10{,}8)^2+(10{,}3-10{,}8)^2 \end{bmatrix}} = 0{,}06$$

$$t_{0,95}(20) = 2{,}093; \qquad \Delta x = 0{,}06\cdot 2{,}093 = 0{,}125$$

$$10{,}8 - 0{,}125 < \bar{x} < 10{,}8 + 0{,}125$$
$$10{,}675 < \bar{x} < 10{,}925$$

44. При измерении электрического сопротивления R_i катушки получены следующие результаты: 6,270 Ом; 6,273; 6,277; 6,271; 6,276; 6,272; 6,278; 6,275; 6.277; 6,274 Ом. Определить абсолютную погрешность сопротивления при доверительной вероятности γ = 0,95.
Решение:
Определим выборочные характеристики:
а) среднее значение непосредственно измеренной величины:

$$\bar{R} = \frac{6{,}270+6{,}273+6{,}277+6{,}271+6{,}276+6{,}272+6{,}278+6{,}275+6{,}277+6{,}274}{10} = 6{,}274\ (Ом)$$

б) оценку среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренной величины:

$$S_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{1}{10\cdot 9}\begin{bmatrix} (6{,}270-6{,}274)^2+(6{,}273-6{,}274)^2+(6{,}277-6{,}274)^2+(6{,}271-6{,}274)^2+(6{,}276-6{,}274)^2+ \\ (6{,}272-6{,}274)^2+(6{,}278-6{,}274)^2+(6{,}275-6{,}274)^2+(6{,}277-6{,}274)^2+(6{,}274-6{,}274)^2 \end{bmatrix}} = 0{,}0008$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(10) = 2{,}262.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\bar{R} = S_{\bar{R}}\cdot t_\alpha(f) = 0{,}0008\cdot 2{,}262 = 0{,}002\ (Ом).$$

45. В результате десяти одинаковых проб были получены следующие значения содержания марганца: 0,69%; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,68%. Вычислить оценку истинного содержания марганца и абсолютную и относительную погрешности при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.
Решение:
Определим выборочные характеристики:
а) среднее значение непосредственно измеренной величины:

$$\bar{x} = \frac{0{,}69+0{,}70+0{,}67+0{,}66+0{,}67+0{,}68+0{,}67+0{,}69+0{,}68+0{,}68}{10} = 0{,}68\ \%$$

б) оценку среднего квадратического отклонения среднего непосредственно измеренной величины:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{10\cdot 9}\begin{bmatrix} (0{,}69-0{,}68)^2+(0{,}70-0{,}68)^2+(0{,}67-0{,}68)^2+(0{,}66-0{,}68)^2+(0{,}67-0{,}68)^2+ \\ (0{,}68-0{,}68)^2+(0{,}67-0{,}68)^2+(0{,}69-0{,}68)^2+(0{,}68-0{,}68)^2+(0{,}68-0{,}68)^2 \end{bmatrix}} = 0{,}004$$

Находим значение коэффициента Стьюдента:

$$t_{0,95}(10) = 2,262.$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta\overline{x} = S_{\overline{x}} \cdot t_{\alpha}(f) = 0,004 \cdot 2,262 = 0,01\ (\%).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_x = \frac{\Delta\overline{x}}{\overline{x}} = \frac{0,01}{0,68} = 0,014 = 1,4\%.$$

Истинное значение содержания марганца:

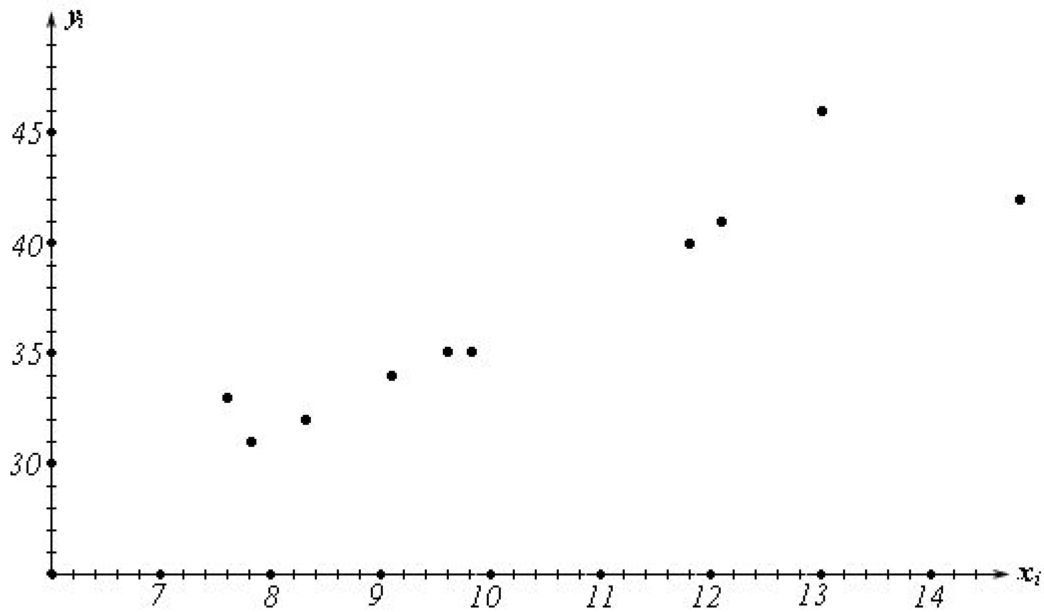
$$x = (0,68 \pm 0,01)\ \%.$$

5. Корреляционная зависимость. Оценка параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.

46. Построить корреляционное поле точек и вычислить коэффициент корреляции между ростом *(X)* и массой (*У*) некоторых животных. Исходные данные приведены в выборке объема $n = 10$.

x_i	31	32	33	34	35	35	40	41	42	46
y_i	7,8	8,1	7,6	9,1	9,6	9,8	11,8	17,1	14,7	13,0

Решение:



Коэффициент корреляции:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{31+32+33+34+35+35+40+41+42+46}{10} = 36,9;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{7{,}8 + 8{,}3 + 7{,}6 + 9{,}1 + 9{,}6 + 9{,}8 + 11{,}8 + 12{,}1 + 14{,}7 + 13{,}0}{10} = 10{,}38\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x}) \cdot (y - \bar{y}) = (31 - 39{,}6) \cdot (7{,}8 - 10{,}38) + \ldots + (46 - 39{,}6) \cdot (13 - 10{,}38) = 99{,}9\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x - \bar{x})^2 = (31 - 39{,}6)^2 + (32 - 39{,}6)^2 \ldots + (46 - 39{,}6)^2 = 224{,}8\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y - \bar{y})^2 = (7{,}8 - 10{,}38)^2 + (8{,}3 - 10{,}38)^2 \ldots + (13 - 10{,}38)^2 = 51{,}9$$

$$r = \frac{99{,}9}{\sqrt{224{,}8 \cdot 51{,}9}} = 0{,}925$$

Величина r близка к 1, это говорит о тесной связи роста и массы.

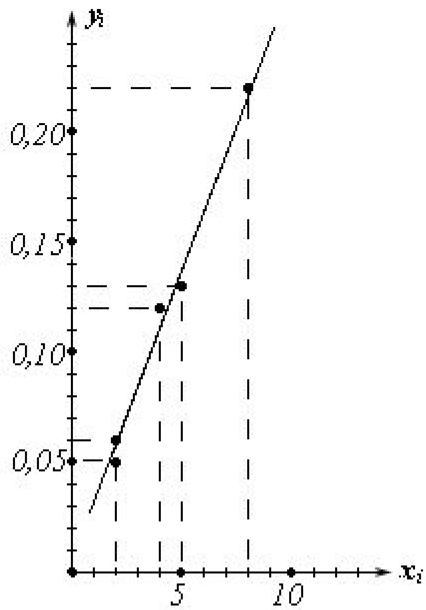
47. Измерена концентрация ($c=Y_i$) алкоголя в крови у n=5 добровольцев с одинаковым весом после нескольких порций алкоголя (X_i). Методом наименьших квадратов определите коэффициенты a и b сглаживающей прямой $\bar{y}_x = ax + b$. Постройте график.

Число порций, X_i	2	2	4	5	8
Концентрация, Y_i	0,05	0,06	0,11	0,13	0,22

Решение:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$$

Найдём предварительно $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$:



x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
2	0,05	4	0,10
2	0,06	4	0,12
4	0,11	16	0,44
5	0,13	25	0,65
8	0,22	64	1,76
$\sum_{i=1}^{5} x_i$ =21	$\sum_{i=1}^{5} y_i$ =0,57	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2$ =113	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ =3,07

$$a = \frac{5 \cdot 3{,}07 - 21 \cdot 0{,}57}{5 \cdot 113 - 21^2} = 0{,}027\,;$$

$$b = \frac{113 \cdot 0{,}57 - 21 \cdot 3{,}07}{5 \cdot 113 - 21^2} = -0{,}00048\,.$$

Искомое уравнение сглаживающей прямой $\bar{y}_x = ax + b$: $\bar{y}_x = 0{,}027x - 0{,}00048$.

График искомой сглаживающей прямой приведён на рисунке:

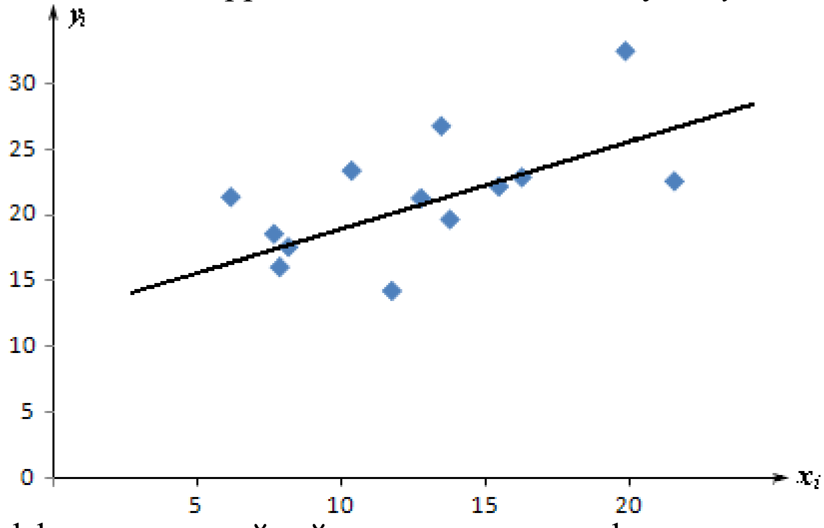
48. В эксперименте на 13 кошках получены данные об интрасклеральном (x) и внутриглазном давлении (y):

x_i	19,8	7,8	12,7	13,4	10,3	13,7	16,2	15,4	21,5	8,1	11,7	7,6	6,1
y_i	32,5	16,1	21,3	26,8	23,4	19,7	22,9	22,2	22,6	17,6	14,3	18,6	21,4

1. Установите, имеется ли корреляционная связь между x и y; определите коэффициент корреляции r:
2. Определите тесноту корреляционной связи.
3. Составьте уравнение регрессии и найдите ожидаемое значение для y при x=18.

Решение:

Построим график, отложив вдоль оси абсцисс X величину интрасклерального давления x , а вдоль оси ординат Y – величину внутриглазного давления y. Тогда каждой паре значений x и y на графике будет соответствовать определённая точка. По характеру расположения точек можно предположить существование линейной корреляционной связи между x и y.



Вычислим коэффициент линейной корреляции r по формуле

$$r_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}\sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2}}$$

$\bar{x} = \frac{1}{13}(19{,}8 + 7{,}8 + \ldots + 6{,}1) = 12{,}64$; $\qquad \bar{y} = \frac{1}{13}(32{,}5 + 16{,}1 + \ldots + 21{,}4) = 21{,}49$

$\overline{x^2} = \frac{1}{13}(19{,}8^2 + 7{,}8^2 + \ldots + 6{,}1^2) = 180{,}5$; $\qquad \overline{y^2} = \frac{1}{13}(32{,}5^2 + 16{,}1^2 + \ldots + 21{,}4^2) = 482{,}2$

$$\overline{xy} = \frac{1}{13}(19{,}8 \cdot 32{,}5 + 7{,}8 \cdot 16{,}1 + \ldots + 6{,}1 \cdot 21{,}4) = 283{,}9;$$

$$s_x = \sqrt{180{,}5 - 12{,}64^2} = 4{,}55; \qquad s_y = \sqrt{482{,}2 - 21{,}49^2} = 4{,}51;$$

$$r = \frac{283{,}9 - 12{,}64 \cdot 21{,}49}{4{,}55 \cdot 4{,}51} = 0{,}595$$

Связь x и y умеренная, положительная.

По формуле $\rho_{yx} = r\frac{s_y}{s_x}$ находим коэффициент регрессии:

$$\rho_{yx} = 0{,}595\frac{4{,}51}{4{,}55} = 0{,}589 .$$

Далее, подставляя ρ_{yx} в формулу $y - \bar{y} = \rho_{yx}(x - \bar{x})$ и вычисляя b, находим уравнение регрессии: $y = 0{,}589x + 14$

И, наконец, вычисляем ожидаемое значение y при $x=18$:

$$y(18) = 0{,}589 \cdot 18 + 14 = 24{,}6$$

49. В результате регистрации некоторых объектов определенного вида по заданным значениям признаков x и y получены числа (частоты) совпадений заданных значений этих признаков, помещенные в следующей таблице. По данным этой таблицы:

1) определить условные средние значения величин x и y, с их помощью получить изображение корреляционного поля и по характеру расположения точек на нем сделать вывод о типе линии регрессионной зависимости между величинами x и y;
2) найти коэффициенты регрессии y на x и x на y по методу наименьших квадратов;
3) составить уравнения прямых регрессии y на x и x на y;
4) вычислить коэффициент корреляции этих величин;
5) построить систему координат и в ней прямые регрессий.

y \ x	111	113	115	117	n_y
11	1	1			2
12	1	2	2	1	6
13			1	1	2
n_x	2	3	3	2	

На основании данных, приведенных в таблице, найдем условные средние $\overline{y_{xi}}$ величины y для всех значений x по формуле: $\bar{y}_{xi} = \sum_{j=1}^{t}\frac{n_{ij}y_j}{n_{xi}}$,

$$\bar{y}_{x=111} = \frac{1\cdot 11 + 1\cdot 12}{2} = 11{,}5 ; \qquad \bar{y}_{x=113} = \frac{1\cdot 11 + 2\cdot 12}{3} = 11{,}7 ;$$

$$\bar{y}_{x=115} = \frac{2\cdot 12 + 1\cdot 13}{3} = 12{,}3 ; \qquad \bar{y}_{x=117} = \frac{1\cdot 12 + 1\cdot 13}{2} = 12{,}5 .$$

По полученным результатам составим таблицу:

x	111	113	115	117
$\overline{y_x}$	11,5	11,7	12,3	12,5

На основании данных, приведенных в таблице, найдем условные средние $\overline{x_{yj}}$ величины x для всех значений y по формуле: $\bar{x}_{yj} = \sum_{i=1}^{t} \frac{n_{ij} x_i}{n_{yj}}$,

$$\bar{x}_{y=11} = \frac{1 \cdot 111 + 1 \cdot 113}{2} = 112;$$

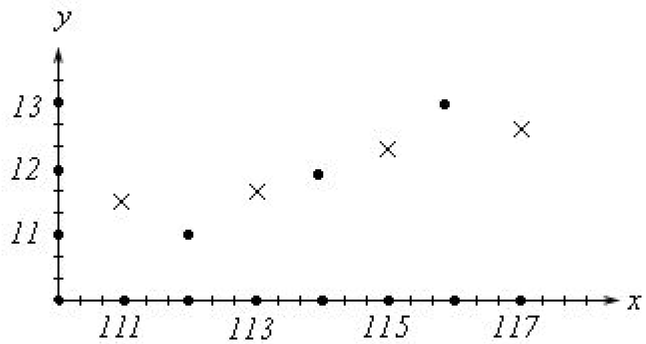
$$\bar{x}_{y=12} = \frac{1 \cdot 111 + 2 \cdot 113 + 2 \cdot 115 + 1 \cdot 117}{6} = 114;$$

$$\bar{x}_{y=13} = \frac{1 \cdot 115 + 1 \cdot 117}{2} = 116.$$

По полученным результатам составим таблицу:

y	11	12	13
$\overline{x_y}$	112	114	116

Данные таблиц отражены на рисунке - корреляционном поле (крестики соответствуют данным первой таблицы, точки – данным второй таблицы).



Как видно из рисунка, характер расположения построенных точек указывает на приблизительную линейную зависимость $\overline{y_x}$ от x и $\overline{x_y}$ от y. Поэтому уравнения регрессии следует искать в виде:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx} x + b, \quad (*)$$

$$\overline{x_y} = \rho_{xy} y + d, \quad (**)$$

где ρ_{yx}, ρ_{xy} – выборочные коэффициенты регрессии, составим вспомогательную расчетную таблицу для их нахождения. Так как значения вариант признаков X и Y достаточно велики, то введем условные варианты u и v следующим образом:

$C_x = 113$, $C_y = 12$ – варианты x и y, на которые приходятся условные варианты $u=v=0$;

$h_x = 2$, $h_y = 1$ – длина интервалов вариации значений признаков x и y.

	u	-1	0	1	2			
v	y \ x	111	113	115	117	n_{yj}	$n_{yj}v_j$	$n_{yj}v_j^2$
-1	11	1	1			2	-2	2
0	12	1	2	2	1	6	0	0
1	13			1	1	2	2	2

n_{xi}	2	3	3	2	10	0	4
$n_{xi}u_i$	-2	0	3	4	5		
$n_{xi}u_i^2$	2	0	3	8	13		
$\sum n_{ij}v_j$	-1	-1	1	1	0		
$u_i\sum n_{ij}v_j$	1	0	1	2	4		

По результатам вычислений, сведенным в таблицу, находим:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{xi}u_i}{n} = \frac{5}{10} = 0{,}5\,,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_{yj}v_j}{n} = \frac{0}{10} = 0\,.$$

Тогда выборочные средние признаков x и y:

$$\bar{x} = C_x + \bar{u}\cdot h_x = 113 + 0{,}5\cdot 2 = 114\,,$$

$$\bar{y} = C_y + \bar{v}\cdot h_y = 12 + 0\cdot 1 = 12$$

Для вычисления дисперсий признаков x и y находим дисперсии условных вариант u и v по формулам:

$$S_u^2 = \overline{u^2} - \left(\bar{u}\right)^2 = \frac{\sum n_{xi}u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_{xi}u_i}{n}\right)^2 = \frac{13}{10} - (0{,}5)^2 = 1{,}3 - 0{,}25 = 1{,}05\,,$$

$$S_v^2 = \overline{v^2} - \left(\bar{v}\right)^2 = \frac{\sum n_{yj}v_j^2}{n} - \left(\frac{\sum n_{yj}v_j}{n}\right)^2 = \frac{7}{10} - 0^2 = 0{,}7 - 0 = 0{,}7\,.$$

Тогда

$$S_u = 1{,}02\,, \qquad S_v = 0{,}84\,.$$

$$S_x = S_u\cdot h_x = 1{,}02\cdot 2 = 2{,}04\,, \qquad S_y = S_v\cdot h_y = 0{,}84\cdot 1 = 0{,}84\,.$$

Коэффициент корреляции признаков x и y совпадает с коэффициентом корреляции условных вариант и вычисляется по формуле:

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\cdot\bar{v}}{S_u\cdot S_v} = \frac{1}{S_u\cdot S_v}\left(\frac{\sum n_{ij}u_iv_j}{n} - \frac{1}{n}\sum n_{xi}u_i\cdot\frac{1}{n}\sum n_{yj}v_j\right) = \frac{1}{1{,}02\cdot 0{,}84}\left(\frac{4}{10} - 0{,}5\cdot 0\right) = \frac{0{,}4}{0{,}86} \approx 0{,}46$$

Следовательно, коэффициенты регрессии:

$$\rho_{yx} = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}46\cdot\frac{0{,}84}{2{,}04} \approx 0{,}19\,,$$

$$\rho_{xy} = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}46\cdot\frac{2{,}04}{0{,}84} \approx 1{,}12\,;$$

коэффициенты b и d в уравнениях (*) и (**):

$$b = \bar{y} - \rho_{yx}\bar{x} = 12 - 0{,}19\cdot 114 = -9{,}66\,,$$

$$d = \bar{x} - \rho_{xy}\bar{y} = 114 - 1{,}12\cdot 12 = 100{,}56\,.$$

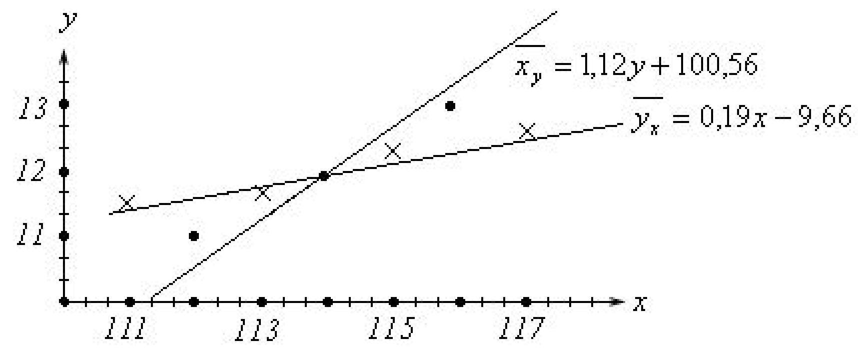
Таким образом, уравнение прямой регрессии y на x запишется в виде:

$$\overline{y_x} = 0{,}19x - 9{,}66\,.$$

Прямая регрессии x на y имеет вид:

$$\overline{x_y} = 1{,}12y + 100{,}56\,.$$

Построим прямые регрессии внутри корреляционного поля:



6. Основы дисперсионного анализа. Однофакторный дисперсионный анализ

50. Проведено исследование влияния трех уровней фактора A на 4 испытуемых. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости $p = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о влиянии фактора A на результативный признак. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Номер испытания	**Уровни фактора *A***		
	A_1	**A_2**	**A_3**
1	126	129	130
2	125	133	131
3	127	127	136
4	123	126	129
$\overline{x_j}$	**125,3**	**128,8**	**131,5**

Решение:
Пусть число проведенных наблюдений при действии каждого из уровней фактора A одинаково и равно q =4. Все значения величины X, наблюдаемые при каждом фиксированном уровне фактора A_j, составляют группу, и в последней строке таблицы представим соответствующие выборочные групповые средние, вычисленные по формуле:

$$\overline{x_j} = \sum_{i=1}^{q} \frac{x_{ij}}{q}.$$

Для упрощения расчетов будем использовать не экспериментальные значения x_{ij} величины X, а значения $y_{ij} = x_{ij} - C$, где постоянная C представляет собой произвольное число, близкое к среднему значению $\bar{x}$ всех результатов наблюдений x_{ij}, таким образом:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{l} \frac{\overline{x_j}}{l} = \frac{125,3 + 128,8 + 131,5}{3} = 128,5,$$

где l - количество уровней фактора A (l=3).
Введем новые переменные:

$$y_{ij} = x_{ij} - C = x_{ij} - \bar{x} = x_{ij} - 128,5$$

Преобразуем таблицу с дальнейшим использованием ее в качестве расчетной.

Номер испытания i	**Уровни фактора А, A_j**						**Итог**
	A_1		**A_2**		**A_3**		
	y_{i1}	**y_{i1}^2**	**y_{i2}**	**y_{i2}^2**	**y_{i3}**	**y_{i3}^2**	
1	-2,5	6,3	0,5	0,3	1,5	2,3	
2	-3,5	12,3	4,5	20,3	2,5	6,3	
3	-1,5	2,3	-1,5	2,3	7,5	56,3	
4	-5,5	30,3	-2,5	6,3	0,5	0,3	
$P_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$		51		29		65	145
$R_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$	-13		1		12		0
R_j^2	169		1		144		314

С помощью таблицы определим вспомогательные величины:

$$P_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2 ; \qquad R_i = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1}^2 = (-2{,}5)^2 + (-3{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-5{,}5)^2 = 51 ;$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{4} y_{i2}^2 = (0{,}5)^2 + (4{,}5)^2 + (-1{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 = 29 ;$$

$$P_3 = \sum_{i=1}^{4} y_{i3}^2 = (1{,}5)^2 + (2{,}5)^2 + (7{,}5)^2 + (0{,}5)^2 = 65 ;$$

$$R_1 = \sum_{i=1}^{4} y_{i1} = (-2{,}5) + (-3{,}5) + (-1{,}5) + (-5{,}5) = -13 ;$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{4} y_{i2} = 0{,}5 + 4{,}5 + (-1{,}5) + (-2{,}5) = 1 ;$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{4} y_{i3} = 1{,}5 + 2{,}5 + 7{,}5 + 0{,}5 = 12 .$$

Рассчитаем значения факторной и остаточной дисперсии:

$$S_{\phi}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} \frac{R_j^2}{q} - \frac{1}{lq}\left(\sum_{j=1}^{l} R_i\right)^2}{l-1} ,$$

$$S_{ocm}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} P_j - \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{l} R_j^2}{l(q-1)} ,$$

таким образом, получим:

$$S_{\phi}^2 = \frac{\frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2 + 1^2 + 12^2\right] - \frac{1}{4\cdot 3}\left[-13 + 1 + 12\right]^2}{3-1} = 39{,}25 ,$$

$$S_{ост}^2 = \frac{(51+29+65)-\frac{1}{4}\cdot\left[(-13)^2+1^2+12^2\right]}{3(4-1)} = 7{,}4\,.$$

По методу Фишера - Снедекора проверим значимость различия дисперсий. Вычислим экспериментальное значение критерия:

$$F_{эксп} = \frac{S_ф^2}{S_{ост}^2} = \frac{39{,}25}{7{,}4} = 5{,}3\,.$$

По таблице критических значений распределений Фишера - Снедекора при уровне значимости p = 0,05, определим критическое значение $F_{кр}(p, f_1, f_2)$. Здесь $f_1 = l-1 = 3-1 = 2$ – число степеней свободы факторное, $f_2 = l(q-1) = 3(4-1) = 9$ – число степеней свободы остаточное. Таким образом:

$$F_{кр}(p, f_1, f_2) = F_{кр}(0{,}05;2;9) = 4{,}26$$

Так как $F_{эксп} > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается в пользу конкурирующей, т.е. групповые средние различаются значимо. Внешнее воздействие надо признать эффективным.