

## **НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

### **№1**

Вычислить интеграл способом непосредственного интегрирования:  $\int (x+1)^3 dx$

*Решение:*

$$\int (x+1)^3 dx = \int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3x^2}{2} + x + C$$

### **№2**

Вычислить неопределенный интеграл:  $\int (x^4 + 7^x) dx$

*Решение:*

$$\int (x^4 + 7^x) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

### **№3**

Вычислить неопределенный интеграл:  $\int \frac{t^2}{(1+2t^3)^2} dt$

*Решение:*

$$\int \frac{t^2}{(1+2t^3)^2} dt = \left| \begin{array}{l} 1+2t^3 = u \\ 6t^2 dt = du \\ t^2 dt = \frac{du}{6} \end{array} \right| = \int \frac{1}{6u^2} du = -\frac{1}{6u} + C = -\frac{1}{6(1+2t^3)} + C$$

### **№4**

Вычислить неопределенный интеграл:  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}}$

*Решение:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3}} = \left| \begin{array}{l} 4x-3 = t \\ 4dx = dt \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \frac{1}{4\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{t} + C = \frac{1}{2} \sqrt{4x-3} + C$$

### **№5**

Вычислить неопределенный интеграл:  $\int \sin 3x dx$

*Решение:*

$$\int \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} 3x = t \\ 3dx = dt \\ dx = dt/3 \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = -\frac{1}{3} \cos t + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

**№6**

Вычислить неопределенный интеграл:  $\int e^{2\cos x} \sin x dx$

Решение:

$$\int e^{2\cos x} \sin x dx = \left. \begin{array}{l} 2\cos x = t \\ -2\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int -\frac{e^t}{2} dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{e^{2\cos x}}{2} + C$$

**№7**

Вычислить интеграл способом интегрирования по частям:  $\int x \cos x dx$

Решение:

$$\int x \cos x dx = \left. \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

**№8**

Вычислить интеграл способом интегрирования по частям:  $\int x \ln x dx$ .

Решение:

$$\int x \ln x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

**№9**

Скорость роста популяции насекомых  $v = t + t^2$  ( $t$  выражается в днях). При  $t=0$  число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя: 1) 1 день; 2) 5 дней; 3) 10 дней.

Решение:

$$x(t) = \int (t + t^2) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C; \quad C = 10000.$$

$$1) \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} + 10000 = 10000$$

$$2) \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{3} + 10000 = 10054$$

$$3) \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{3} + 10000 = 10383$$

### №10

Скорость роста числа бактерий задается формулой  $v = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t$ . Составить уравнение роста числа бактерий  $x(t)$ , если при  $t=0$   $x(0) = 10^6$ .

*Решение:*

$$x(t) = \int (10^4 - 2 \cdot 10^3 t) dt = 10^4 t - \frac{2 \cdot 10^3 t^2}{2} + C = 10^4 t - 10^3 t^2 + C; \quad C = 10^6.$$

$$x(t) = 10^4 t - 10^3 t^2 + 10^6$$

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### №11

Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 5}$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 5} = \left. \begin{array}{l} e^x + 5 = t \\ d(e^x + 5) = dt \\ e^x dx = dt \\ x = 0 \dots t = 6 \\ x = 1 \dots t = e + 5 \end{array} \right| = \int_6^{e+5} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_6^{e+5} = \ln \frac{e+5}{6}$$

### №12

Вычислить определенный интеграл:  $\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx$

Решение:

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} e^{-x} dx = dv \\ x+1 = u \\ d(x+1) = du \\ dx = du \\ \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \end{array} \right| = -e^{-x}(x+1) \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -2e^{-1} + 1 - e^{-1} + 1 = 2 - 3e^{-1}$$

### №13

Вычислить определенный интеграл:  $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$

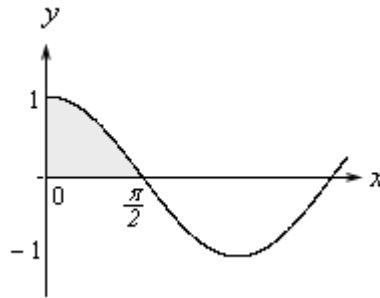
Решение:

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx = \left. \begin{array}{l} e^{-x} dx = dv \\ x^2 = u \\ 2xdx = du \\ \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \end{array} \right| = -e^{-x} 2x \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 e^{-x} x dx = \left. \begin{array}{l} e^{-x} dx = dv \\ x = u \\ dx = du \\ \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \end{array} \right| =$$
$$= -e^{-x} 2x \Big|_{-1}^1 - 2e^{-x} x \Big|_{-1}^1 + 2 \int_{-1}^1 e^{-x} dx = -e^{-x} 2x \Big|_{-1}^1 - 2e^{-x} x \Big|_{-1}^1 - 2e^{-x} \Big|_{-1}^1 = -6e^{-1} + 3e$$

### №14

Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой  $y=\cos x$  и осью  $Ox$ , в пределах  $0$  до  $\pi/2$ .

Решение:



Площадь заключенная между кривой и осью  $Ox$  определяется интегралом:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \text{ ед. кв.}$$